

Le principe de moindre action

Le formalisme de Lagrange qu'on vient de développer est une conséquence des lois de Newton. On va maintenant montrer qu'on peut le dériver à partir d'une formulation complètement différente. Pour le faire, il faut introduire le calcul des variations.

CALCULE DES VARIATIONS

Il faut d'abord définir le concept de "fonctionnelle".

Une fonction est une opération qui prend un nombre en $\mathbb{R}^n$ et le transforme en $\mathbb{R}$: $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

(bien évidemment on ne doit pas se limiter à $\mathbb{R}$, mais on le fait par simplicité).

L'argument d'une fonction est un nombre.

Une fonctionnelle est une opération qui prend une fonction et la transforme en $\mathbb{R}$: $I : f \rightarrow \mathbb{R}$

Un exemple typique est

$$I[f] = \int_a^b F(f, f', f'', \dots, x) dx$$

$$\text{ou } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (f(x))$$

L'argument de I est donc une fonction, et pour chaque choix de la fonction, I prend une valeur différent.

Par exemple :

$$F(f) = x f f'$$

Alors

$$I[f] = \int_0^1 F(f, f', x) dx$$

est

$$I[\underset{\substack{\uparrow \\ f=x}}{x}] = \int_0^1 x \cdot \underbrace{x}_{\substack{\uparrow \\ f}} \cdot \underbrace{1}_{\substack{\uparrow \\ f'}} dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$I[\underset{\substack{\uparrow \\ f=x^2}}{x^2}] = \int_0^1 x \cdot \underbrace{x^2}_{\substack{\uparrow \\ f}} \cdot \underbrace{(2x)}_{\substack{\uparrow \\ f'}} dx = \left. \frac{2}{5} x^5 \right|_0^1 = \frac{2}{5}$$

NOTE : Les fonctionnelles sont étudiées dans l'Analyse Fonctionnelle, une branche très belle et riche des mathématiques. Elle généralise l'analyse à des objets (arguments) qui sont des fonctions.

Quelle est la question à la base du calcul des variations?

Soit donné le fonctionnelle $I[y]$, dont l'argument sont les fonctions $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y(x)$ avec $x \in [a, b]$.

$$I[y] = \int_a^b F(y, y', x) dx$$

avec $y(a)$ et $y(b)$ fixées pour toute choix de y

$$\begin{cases} y(a) = y_a \\ y(b) = y_b \end{cases} \quad \forall y$$

Alors on cherche la fonction y qui minimise $I[y]$.

- Route formale (voir notes sur le moodle): on utilise la dérivée fonctionnelle

$$\frac{\delta I}{\delta y} = 0$$

" δ " on l'utilise pour la dérivée fonctionnelle

(en effet très similaire à l'analyse, après avoir définis ce que la dérivée par rapport à une fonction est).

- On se reconduit à l'analyse.

Si on connaît la solution $\bar{y}(x)$, on peut écrire toutes les autres fonctions de la forme

$$y(x) = \bar{y}(x) + \alpha \eta(x) \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

avec les conditions

$$\begin{cases} \eta(a) = 0 \\ \eta(b) = 0 \end{cases} \quad \text{car } y(x) \text{ et } \bar{y}(x) \text{ doivent satisfaire}$$
$$\begin{cases} y(a) = \bar{y}(a) = y_a \\ y(b) = \bar{y}(b) = y_b \end{cases}$$

Alors, si $\eta(x)$ est arbitraire (sauf pour les conditions en a et b), la dérivée de I par rapport à α doit être nulle en $\alpha=0$.

En effet, pour chaque $\eta(x)$ donné,

$$I[y] = I[\eta; \alpha] = I(\alpha) \quad \leftarrow \text{est une fonction de } \alpha!$$

↑
dépend paramétriquement de α

Donc

$$I[y] = \int_a^b F(\bar{y} + \alpha \eta, \bar{y}' + \alpha \eta', x) dx$$

et

$$\left. \frac{dI}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0 \quad \forall \eta$$

On développe cette dernière expression :

$$\left. \frac{dI}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_a^b \left\{ \frac{\partial F}{\partial (\bar{y} + \alpha \eta)} \frac{\partial (\bar{y} + \alpha \eta)}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial (\bar{y}' + \alpha \eta')} \frac{\partial (\bar{y}' + \alpha \eta')}{\partial \alpha} \right\} dx \Big|_{\alpha=0} =$$

$$= \int_a^b \left\{ \underbrace{\frac{\partial F}{\partial \bar{y}}}_{\alpha=0} \eta + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial \bar{y}'}}_{\alpha=0} \eta' \right\} dx =$$

$$= \int_a^b \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \eta dx + \int_a^b \frac{\partial F}{\partial \bar{y}'} \eta' dx$$

Et on travaille par parties sur le deuxième intégrale

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} &= \int_a^b \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \eta \, dx + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \bar{y}'} \eta \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{y}'} \right) \cdot \eta \, dx \right\} = \\ &= \int_a^b \left\{ \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{y}'} \right) \right\} \eta \, dx + \frac{\partial F}{\partial \bar{y}'} \eta \Big|_a^b \end{aligned}$$

mais $\eta(a) = \eta(b) = 0$ et donc le dernier terme est nul.

Finalement on a

$$\frac{dI}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} = - \int_a^b \left\{ \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{y}'} \right) - \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \right\} \eta \, dx = 0$$

↑
car on sait
que $\frac{dI}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} = 0$

D'autre côté, η est arbitraire, et donc cet intégrale est nulle pour n'importe quel choix de η seulement si

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{y}'} \right) - \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} = 0$$

qui en réalité est une équation différentielle en $\bar{y}$.

Autrement dit, l'hypothèse que $\bar{y}$ soit solution est consistante si elle satisfait cette équation, qui s'appelle équation d'Euler.

À ce point l'analogie avec le formalisme de Lagrange est clair :

$$F \longrightarrow L$$

$$y \longrightarrow q$$

$$x \longrightarrow t$$

et on définit l'**ACTION** $S[q]$

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad \text{avec}$$

$$\begin{cases} q(t_1) = q_1 \\ q(t_2) = q_2 \end{cases}$$

La fonction qui minimise S , et que doit donc satisfaire l'équation de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

est la trajectoire du système.

On dit alors que le système évolue selon une trajectoire qui minimise l'action selon le

PRINCIPE DE MOINDRE ACTION

A noter : pour résoudre les équations de Lagrange on pose les conditions initiales :
 $q(t_1)$ et $\dot{q}(t_1)$

Pour suivre le parcours qui nous a amené au principe de moindre action et à l'équation de Euler-Lagrange, on a posé $q(t_1)$ et $q(t_2)$ (aucune condition sur la dérivée).

Il est important de marquer le fait que l'équation différentielle peut être résolue avec les deux types de conditions.

Extension à plusieurs degrés de liberté $\{q_j\}$

On définit, comme on avait fait avant :

$$z_j = q_j + \alpha \eta_j \quad \text{ou} \quad q_j \text{ est la solution cherchée}$$

avec $z_j(t_1) = z_j(t_2) = 0 \quad \forall j$ car $z_j(t_1) = q_j(t_1) = q_{j1}$ et $z_j(t_2) = q_j(t_2) = q_{j2}$

Alors

$$S[\{z_j\}] = \int_{t_1}^{t_2} L(\{q_j + \alpha \eta_j\}, \{\dot{q}_j + \alpha \dot{\eta}_j\}, t) dt$$

$$\left. \frac{dS}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_j} \eta_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{\eta}_j \right\} dt = 0$$

on intègre par partie le terme en $\dot{\eta}_j$ et on obtient

$$\left. \frac{dS}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] \eta_j dt +$$

$$+ \underbrace{\sum_j \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \eta_j \right]_{t_1}^{t_2}}_{=0 \text{ car } \eta_j(t_1) = \eta_j(t_2) = 0}$$

Puisque les q_j sont arbitraires, alors il est nécessaire que chaque terme soit nul et on aboutit encore aux équations de Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad \forall j$$

INVARIANCE DE JAUGE ET PRINCIPE DE MOINDRE ACTION

Le principe de moindre action permet de découvrir que le Lagrangien n'est pas défini de façon unique. En effet, on peut lui ajouter la dérivée totale d'une fonction qui dépende seulement de $\{q_j\}$ et du temps, mais pas des vitesses généralisées, et on obtient exactement les mêmes équations :

$$L'(\{q_j\}, \{q_j\}, t) = L(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t) + \frac{dF(\{q_j\}, t)}{dt}$$

Alors

$$\begin{aligned} S'[\{z_j\}] &= \int_{t_1}^{t_2} L'(\{z_j\}, \{\dot{z}_j\}, t) dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} L(\{z_j\}, \{\dot{z}_j\}, t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{dF(\{z_j\}, t)}{dt} dt = \\ &= S[\{z_j\}] + F(\{q_j(t_2)\}, t) - F(\{q_j(t_1)\}, t) \end{aligned}$$



ne dépendent pas de z
car $q_j(t_1) = q_j(t_2) = q$

Donc à la fin

$$\frac{dS'[\{z_j\}]}{d\alpha} = \frac{dS[\{z_j\}]}{d\alpha}$$

qui engendre les mêmes équations, donc.

